

Conos poliédricos y ecuaciones algebraicas

M. J. Soto J. L. Vicente

Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

Singularidades de Ecuaciones Algebraicas y Ecuaciones
Diferenciales. Métodos Valorativos, Homológicos y Analíticos.

Sevilla, Diciembre de 2005



- Artículo: *Polyhedral cones and Monomial Blowing Ups*, LLA, **412**, 2.006.
- Definiré un objeto geométrico (combinatorio) para aplicarlo a la resolución de ciertas ecuaciones.
- Caso de dimensión 2: *Résolution de certaines équations algébriques*, ASFT, a aparecer.



- Artículo: *Polyhedral cones and Monomial Blowing Ups*, LLA, **412**, 2.006.
- Definiré un objeto geométrico (combinatorio) para aplicarlo a la resolución de ciertas ecuaciones.
- Caso de dimensión 2: *Résolution de certaines équations algébriques*, ASFT, a aparecer.

- Artículo: *Polyhedral cones and Monomial Blowing Ups*, LLA, **412**, 2.006.
- Definiré un objeto geométrico (combinatorio) para aplicarlo a la resolución de ciertas ecuaciones.
- Caso de dimensión 2: *Résolution de certaines équations algébriques*, ASFT, a aparecer.

$E = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, que generan un hiperplano de \mathbb{R}^n

$\Delta = \text{conv}(E)$,

Entonces, un cono poliédrico es

$$\Gamma(\Delta) = \bigcup_{\mathbf{a} \in \Delta} \langle \mathbf{a} \rangle_+.$$

Una explosión monomial es $\phi_{ij} \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$, dada por

$$\phi_{ij}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n)$$

o, alternativamente,

$$x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \mapsto x_1^{a_1} \dots x_j^{a_i+a_j} \dots x_n^{a_n}.$$

Se pueden escribir en la forma

$$\phi_{ij}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}M_{ij}, \quad M_{ij} = I_n + E_{ij}.$$

Una implosión monomial es la aplicación inversa.

Explosiones y Conos Poliédricos

Sea $E = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, $\Delta = \text{conv}(E)$,

$$\Gamma(\Delta) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)A \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m\},$$

entonces

$$\phi_{ij}(\Gamma(\Delta)) = \Gamma(\Delta'), \quad \Delta' = \text{conv}(E'), \quad E' = \phi_{ij}(E).$$

i.e.,

$$\Gamma(\Delta') = \phi_{ij}(\Gamma(\Delta)) = \{\lambda AM_{ij} \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m\}.$$



Sea $Q = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ el primer cuadrante, y llamemos opuesto del primer cuadrante a $-Q$.

Problema de Caracterización

Dado Γ un cono poliédrico, ¿cuándo existe una sucesión finita de explosiones monomiales tales que el transformado Γ' de Γ verifique $\Gamma' \subseteq Q$?

Sea $E = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, $\Delta = \text{conv}(E)$, $\Gamma(\Delta)$ un cono poliédrico.

Teorema

Son equivalentes

- 1 Existe una sucesión finita de explosiones monomiales tal que el transformado $\Gamma(\Delta)$ verifica $\Gamma(\Delta') \subset Q$.
- 2 $\Gamma(\Delta) \cap (-Q) = \{\mathbf{0}\}$.

1 \implies 2 es fácil,

2 \implies 1 ...

Aplicación del Teorema de Farkas-Minkowski

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Se verifica una y sólo una de las condiciones

- 1 Existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}A \leq 0$.
- 2 Existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$ tal que $A\mathbf{y} > 0$.

Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta \mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta \mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta \mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta \mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta\mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta\mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta\mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Demostración del Criterio Geométrico

Sea $\{\mathbf{0}\} = \Gamma(\Delta) \cap (-Q)$

$\implies \mathbf{x}A \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Por hipótesis, no es $\mathbf{x}A \leq 0$

\implies existe $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ con $\Delta\mathbf{y} > 0$, podemos suponer $\text{mcd}(y_i) = 1$.

\implies existe $Y = \prod M_{ij}$ tal que $Y = (\dots | \mathbf{y} | \dots)$.

\implies Una de las columnas de AY es $A\mathbf{y} > 0$.

$\implies AY \rightarrow Q$.



Sea

$$P(\mathbf{x}, z) = z^m + h_1(\mathbf{x})z^{m-1} + \cdots + h_{m-1}(\mathbf{x})z + h_m(\mathbf{x}) \in k[[\mathbf{x}]]\langle z \rangle$$

un polinomio de Weierstraß irreducible.

Problema: Resolver $P(\mathbf{x}, z) = 0$.

Teorema de Jung-Abhyankar

Si el discriminante de P , D es a cruzamientos normales, las raíces de $P(\mathbf{x}, z)$ forman un conjunto de conjugadas de una serie de Puiseux en \mathbf{x} .

Sea

$$P(\mathbf{x}, z) = z^m + h_1(\mathbf{x})z^{m-1} + \cdots + h_{m-1}(\mathbf{x})z + h_m(\mathbf{x}) \in k[[\mathbf{x}]] [z]$$

un polinomio de Weierstraß irreducible.

Problema: Resolver $P(\mathbf{x}, z) = 0$.

Teorema de Jung-Abhyankar

Si el discriminante de P , D es a cruzamientos normales, las raíces de $P(\mathbf{x}, z)$ forman un conjunto de conjugadas de una serie de Puiseux en \mathbf{x} .

- 1 Jung (1908): $n = 2$.
- 2 Abhyankar (1955): $n > 1$, teoría de Galois.
- 3 Kiyek & Vicente (2004): $n > 1$, teoría de ramificación.

Intuición

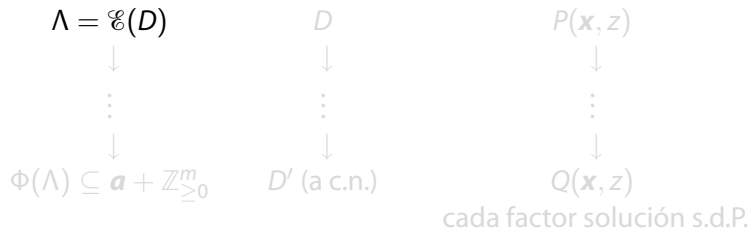
Estructuras combinatorias y lineales. Hay un resultado parcial.

Teorema

Las raíces de $P(\mathbf{x}, z) = 0$ son series de potencias en $k((x_n^{1/p})) \cdots ((x_{i+1}^{1/p})) \llbracket x_1^{1/p}, \dots, x_i^{1/p} \rrbracket$ tales que sus diagramas de Newton están contenidos en un cono poliédrico que se puede llevar al primer cuadrante mediante explosiones monomiales.

(No es necesario que D sea a cruzamientos normales.)

Idea de la demostración



Idea de la demostración

$$\Lambda = \mathcal{C}(D)$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$\Phi(\Lambda) \subseteq \mathbf{a} + \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$$

$$D$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$D' \text{ (a c.n.)}$$

$$P(\mathbf{x}, z)$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$Q(\mathbf{x}, z)$$

cada factor solución s.d.P.

Idea de la demostración

$$\Lambda = \mathcal{C}(D)$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$\Phi(\Lambda) \subseteq \mathbf{a} + \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$$

$$D$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$D' \text{ (a c.n.)}$$

$$P(\mathbf{x}, z)$$
$$\downarrow$$
$$\vdots$$
$$\downarrow$$
$$Q(\mathbf{x}, z)$$

cada factor solución s.d.P.

Idea de la demostración

$$\begin{array}{c} \Lambda = \mathcal{C}(D) \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \Phi(\Lambda) \subseteq \mathbf{a} + \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ D' \text{ (a c.n.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(\mathbf{x}, z) \\ \downarrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ Q(\mathbf{x}, z) \\ \text{cada factor solución s.d.P.} \end{array}$$

- 1 ¿Se puede probar el Teorema **G** sin usar J-A?
- 2 Si la respuesta es afirmativa, ¿Se puede probar J-A por métodos lineales y combinatorios?

Respuestas parciales, en dimensión 2, ambas son afirmativas:
Résolution de certaines équations algébriques (AFST, 200?).
En dimensión $n...$

Consideramos k algebraicamente cerrado de característica cero y

$$P(x, y, z) = z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \cdots + a_n(x, y) \in k[[x, y]][z]$$

sin raíces múltiples.

Fijamos constantes: $\overline{k((y))}$, y consideramos \mathcal{E} el diagrama de Newton en (x, z) .

Como $(0, n) \in \mathcal{E}$, sus raíces son series de Puiseux de orden no negativo, y se calculan raíces *à la* Newton-Puiseux.

Tomamos segmentos admisibles de pendiente negativa (salvo quizás el primer paso), y el punto $(0, n)$ desciende ... hasta $(0, 1)$.

- A partir de este momento (punto de estabilización) sólo hay una elección de segmento admisible, y las ecuaciones para calcular los coeficientes correspondientes son lineales con el mismo coeficiente.
- El diagrama de Newton en (x, y) está contenido en un cono poliédrico.
- J-A se sigue de un razonamiento de truncamiento de series y discriminantes.

- 1 En dimensión mayor que dos, el punto de estabilización no es tan fácil de manejar, pero quizás no imposible.
- 2 La impresión es que el hecho de que las raíces entren en un cono poliédrico es equivalente al Teorema de J-A.